Второй отборочный тур олимпиады ЮМШ

Алгебра и математический анализ.

1.1 Известно, что длины сторон прямоугольника равны $sin(x)$ и $cos(x)$ для некоторого x $\in \mathbb{R}$. Чему, самое большее, может равняться его площадь?

1.2. Дана дробь, в числителе которой выписаны подряд все натуральные числа от 1 до 1009 в порядке возрастания, а в знаменателе – подряд все натуральные числа от 2020 до 1011 в порядке убывания. Найдите все числа x, обладающие следующим свойством: если прибавить x к числителю и знаменателю данной дроби, то получится дробь, полученная из исходной приписыванием в конец к числителю и к знаменателю числа 1010. (Ответ запишите десятичной дробью или целым числом).

1.3. Найдите произведение всех вещественных корней уравнения $x^4 + (2-x)^4 = 34$.

1.4. Пусть x_1, x_2, $\ldots$, x_{19} – положительные вещественные числа . Известно, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{19}} = 20$ и $x_1 + x_2 + \cdots + x_{19} = 20$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $x_1 + \frac{1}{x_1}$?

Дискретный Вася.

2.1. Вася захотел найти два квадрата натуральных чисел, что если приписать один из них к другому, то получится четырехзначное число, которое тоже является квадратом. Помогите ему (в ответе запишите получившиеся четырехзначное число).

2.2. Из шахматной доски вырезали все клетки с согласной буквой и простой цифрой. Шахматный конь стоит на клетке b1 и хочет добраться по невырезанной части доски до клетки a2 не более чем за 8 ходов. Помогите ему. (Ответ должен быть записан в виде последовательности клеток, на которые становится конь. Клетки пишутся одной строчкой без пробелов. Например, a3c4e3...)

2.3. В государстве 1000 городов и совсем нет дорог. Король Василий I хочет соединить каждую пару городов дорогой. Для этого он каждый год разбивает города на две группы и проводит между всеми парами городов из разных групп недостающие дороги. За сколько лет он управится (в ответе укажите наименьшее возможное значение)?

2.4. Вася нарисовал граф, вершинами которого являются двухэлементные множества 20-элементного подмножества, а ребра соединяют пересекающиеся множества. Сколько в этом графе циклов на четырех вершинах?

Геометрические мотивы.

3.1. Окружность вписана в правильный треугольник площади 30 и одновременно описана вокруг правильного шестиугольника. Найдите площадь этого шестиугольника.

3.2. На окружности, вписанной в квадрат, взята точка K. Расстояния от K до ближайших к ней сторон квадрата равны 1 и 2. Найдите длину стороны квадрата.

3.3. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 16$, $AC = 5$. Пусть I – точка пересечения его биссектрис. Найдите длину BC, если $AI = 4$.

3.4. Треугольный кусок бумаги площади 120 перегнут по прямой, параллельной одной из своих сторон, и сделан плоской фигурой. Чему равна минимально возможная площадь такой фигуры?

Олимпиадная смесь.

4.1. Найдите наибольшее возможное число с неповторяющимися цифрами, в котором каждая цифра, начиная с третьей, является делителем произведения двух предыдущих цифр (например, как в числе 5632).

4.2. Для вещественных чисел a и b введена операция "звездочка": $a \star b = sin(a) \cdot cos(b)$. Пусть x и y – такие два вещественных числа, что $x \star y - y \star x = 0.5$. Чему равно наибольшее возможное значение выражения $x \star y + y \star x$?

4.3. По кругу стоят 60 человек. Каждый из них — либо рыцарь (говорит только правду), либо лжец (говорит только неправду). Каждый произносит: «Оба моих соседа лжецы». Потом они перестраиваются в другой хоровод, и каждый говорит: «Оба моих соседа — те же, что и в прошлый раз». Каково максимально возможное количество рыцарей в кругу?

4.4. Мама ушла, вручив папе и сыну пакет с n конфетами ($n > 10$), и попросила оставить ей хотя бы 10 конфет. Папа и сын решили сыграть в такую игру. Они по очереди берут из пакета конфеты, первый ход делает папа. За один ход можно взять и съесть не больше половины конфет, находящихся в пакете, при этом папа каждым своим ходом берет чётное (и ненулевое) количество конфет, а сын — нечётное. Проигрывает тот, после чьего хода в пакете оказывается меньше 10 конфет. Укажите наибольшее n, при котором отец сумеет выиграть, как бы ни играл сын.