Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 11 апреля 2021 года
7 класс. Основная аудитория

1. Сумма квадратов 116 натуральных чисел равна 144. Докажите, что произведение этих чисел тоже равно 144.

2. Круг разбит на 1000 секторов, все сектора белые. Каждую минуту какие-то 500 подряд секторов перекрашивают — белые в красные, а красные — в белые. При некотором перекрашивании количество белых секторов не поменялось. Докажите, что при одном из соседних (предыдущем или последующем) — тоже.

3. Напоминаем, что сумма углов треугольника равняется 180 градусам. В треугольнике ABC угол A прямой. Пусть BM — медиана треугольника, D — середина BM. Оказалось, что $\angle ABD = \angle ACD$. А чему равны эти углы?

4. У Джо есть по 99 монет трех видов: легкие массой 1 грамм, средние массой 2 грамма и тяжелые массой 3 грамма. Каждый тип монет хранится в ящике, на котором имеется наклейка с надписью, соответственно, ЛЕГКИЕ, СРЕДНИЕ и ТЯЖЕЛЫЕ. Однажды ночью Эми переклеила наклейки так, что теперь надпись ни на одном из ящиков не соответствует его содержимому. Покажите, как, имея эту информацию, выложить на чашки весов все монеты так, чтобы гарантированно получить равновесие.

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 11 апреля 2021 года
7 класс. Выводная аудитория

5. Найдите все натуральные числа, чьи собственные делители можно разбить на пары так, чтобы в каждой паре числа отличались на 545. Собственным делителем натурального числа называется натуральный делитель, отличный от единицы и самого числа.

6. Докажите, что на доске 533×533, раскрашенной в шахматном порядке, найдутся одноцветные клетки A и B со следующим свойством: «количество способов разбить доску без клетки B на доминошки не равно количеству способов разбить на доминошки доску без клетки A». Способы, отличающиеся поворотом и переворотом — разные способы.

7. На окружности выбрано 100 различных точек. Петр и Екатерина играют в игру. Первым ходом Петр выбирает три треугольника с вершинами в выбранных точках, а дальше каждый по очереди выбирает по одному такому треугольнику. В любой момент у всех выбранных треугольников должна быть общая внутренняя точка, повторять треугольники нельзя. Кто выиграет при правильной игре?