Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 11 апреля 2021 года
11 класс. Основная аудитория

Сюжет 1.

В армии Шакти состоит 100 троглодитов; некоторые троглодиты дружат друг с другом, а некоторые нет. Множество троглодитов A называется *общительным*, если любой другой троглодит дружит с кем-то из A и *странным общительным*, если при этом никакие два троглодита из A не дружат. Оказалось, что каждый троглодит с кем-то дружит.

1.1. В армии нашлись троглодиты Вася и Петя, образующие общительное множество. Тогда Шакти может найти странное общительное множество из не более, чем 50 троглодитов.

1.2. Пусть не нашлось таких четырех троглодитов A, B, C и D, что A дружит с B, C и D, а B, C и D между собой нет. Дас нашел общительное множество размера k. Докажите, что Шакти сможет найти странное общительное множество размера не более k.

Сюжет 2.

Есть квадрат со стороной 2. Вася закрасил в нем конечное число многоугольников так, что не нашлось закрашенных точек на расстоянии 1 (граница считается незакрашенной). Пусть A — закрашенное множество, $S(A)$ — его площадь.

2.1. Приведите пример такого A, что $S(A) \geqslant 1$.

2.2. Докажите, что $S(A) \leqslant 2$.

Сюжет 3.

Во всех пунктах помимо указанных предположений считается, что $n \geqslant 10$.

3.1. Решите неравенство в натуральных числах:

$$n \leqslant n! - 4^n \leqslant 4n.$$

3.2. Найдите все натуральные n и составные k такие, что

$$n \leqslant n! - k^n \leqslant kn.$$

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 11 апреля 2021 года
11 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1.

В армии Шакти состоит 100 троглодитов; некоторые троглодиты дружат друг с другом, а некоторые нет. Множество троглодитов A называется *общительным*, если любой другой троглодит дружит с кем-то из A и *странным общительным*, если при этом никакие два троглодита из A не дружат.

1.3. Покажите, что странного общительного множества из не более чем 81 троглодита может и не оказаться.

1.4. Докажите, что Шакти всегда сможет найти странное общительное множество не более, чем из 82 троглодитов.

Сюжет 2.

Есть квадрат со стороной 2. Вася закрасил в нем конечное число многоугольников так, что не нашлось закрашенных точек на расстоянии 1 (граница считается незакрашенной). Пусть A — закрашенное множество, $S(A)$ — его площадь.

2.3. Оцените сверху $S(A)$ как 1.65.

2.4. Приведите пример такого A, что $S(A) \geqslant 1.14$.

Сюжет 3.

Во всех пунктах помимо указанных предположений считается, что $n \geqslant 10$.

3.3. Найдите все простые n и натуральные k такие, что

$$n \leqslant n! - k^n \leqslant kn.$$

3.4. Решите неравенство в натуральных числах:

$$n \leqslant n! - k^n \leqslant kn.$$