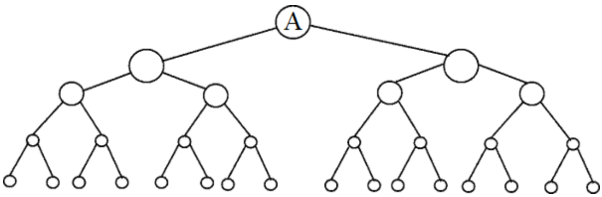
**Олимпиада**
**Юношеской математической школы**
**II тур, 22 декабря 2019 года**
**9 класс. Основная аудитория**

**Сюжет 1.**

В архипелаге есть $n$ скалистых островов, на них обитают $n$ колоний ту́пиков (каждая колония целиком гнездится на одном острове). Некоторые пары островов соединены воздушными коридорами, причём от каждого острова до любого другого есть ровно один путь по этим коридорам. Острова, соединённые коридором, считаются соседними. Иногда происходят *миграции*: с некоторого острова на каждый соседний переселяется по колонии тупиков.

**1.1.** Докажите, что в любой момент может произойти миграция.

**1.2.** Пусть схема островов и коридоров устроена так, как показано на рисунке. Докажите, что при любом начальном расселении колоний существует способ организовать миграции так, что по итогам менее чем 1000 миграций на острове $A$ появится колония. При решении этого пункта можно без доказательства пользоваться результатом пункта 1.




**Сюжет 2.**

Две окружности, вписанные в угол с вершиной $R$, пересекаются в точках $A$ и $B$. Через $A$ проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке $C$, а большую — в точке $D$. Оказалось, что $AB = AC = AD$.

**2.1.** Докажите, что касательные к окружностям в точке $A$ перпендикулярны.

**2.2.** Пусть $C$ и $D$ совпали с точками касания окружностей и угла. Докажите, что угол $R$ прямой.

**Сюжет 3.**

На $n$ карточках написали по $k$ чисел, сумма на каждой карточке равна $m$. Оказалось, что любой набор из $k$ неотрицательных чисел с суммой 1 можно получить, уменьшив некоторые числа на одной из карточек (наборы неупорядоченные). Пусть $a(n, k)$ — наименьшее $m$, при котором это возможно.

**3.1.** Найдите $a(1, 5)$.

**3.2.** Найдите $a(n, 2)$.

**Олимпиада**
**Юношеской математической школы**
**II тур, 22 декабря 2019 года**
**9 класс. Выводная аудитория**

**Сюжет 1.**

В архипелаге есть $n$ скалистых островов, на них обитают $n$ колоний ту́пиков (каждая колония целиком гнездится на одном острове). Некоторые пары островов соединены воздушными коридорами, причём от каждого острова до любого другого есть ровно один путь по этим коридорам. Острова, соединённые коридором, считаются соседними. Иногда происходят *миграции*: с некоторого острова на каждый соседний переселяется по колонии тупиков.

**1.3.** Докажите, что как бы колонии тупиков ни располагались изначально, миграциями можно расселить колонии по одной на остров.

**1.4.** Пусть изначально на каждом острове обитает одна колония, и пусть один из островов имеет $d$ соседних. Чему может равняться максимально возможное количество колоний, способных поселиться на этом острове?

**Сюжет 2.**

Две окружности, вписанные в угол с вершиной $R$, пересекаются в точках $A$ и $B$. Через $A$ проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке $C$, а большую — в точке $D$. Оказалось, что $AB = AC = AD$.

**2.3.** Пусть $C$ и $D$ совпали с точками касания окружностей и угла. Чему может быть равен угол $ADR$?

**2.4.** Докажите, что если $\angle R$ прямой, то $C$ и $D$ совпадают с точками касания окружностей и угла.

**Сюжет 3.**

На $n$ карточках написали по $k$ чисел, сумма на каждой карточке равна $m$. Оказалось, что любой набор из $k$ неотрицательных чисел с суммой 1 можно получить, уменьшив некоторые числа на одной из карточек (наборы неупорядоченные). Пусть $a(n,k)$ — наименьшее $m$, при котором это возможно.

**3.3.** Докажите, что найдется $n$ такое, что $a(n, 10^{100}) \leqslant 1 + 10^{-100}$.

**3.4.** Докажите, что найдется $k$ такое, что $a(10^{100}, k) > 10^{100}$.