**Олимпиада**
**Юношеской математической школы**
**II тур, 22 декабря 2019 года**
**9 класс. Основная и выводная аудитория**

**Сюжет 1.** В архипелаге есть $n$ скалистых островов, на них обитают $n$ колоний ту́пиков (каждая колония целиком гнездится на одном острове). Некоторые пары островов соединены воздушными коридорами, причём от каждого острова до любого другого есть ровно один путь по этим коридорам. Острова, соединённые коридором, считаются соседними. Иногда происходят *миграции*: с некоторого острова на каждый соседний переселяется по колонии тупиков.

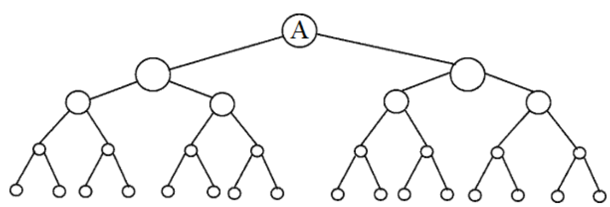
**1.1.** Докажите, что в любой момент может произойти миграция.

**Решение.** Представим архипелаг в виде графа. Тогда наша система — дерево с неотрицательным числом в каждой вершине (равным числу колоний на соответствующем острове); сумма всех чисел равна $n$. Если мигрировать нельзя, каждое число меньше соответствующей степени хотя бы на единичку. Суммируя неравенства по всем вершинам, получаем:

$$n \leqslant 2(n-1) - n = n - 2.$$

Противоречие. □

**1.2.** Пусть схема островов и коридоров устроена так, как показано на рисунке. Докажите, что при любом начальном расселении колоний существует способ организовать миграции так, что по итогам менее чем 1000 миграций на острове $A$ появится колония. При решении этого пункта можно без доказательства пользоваться результатом пункта 1.




**Решение.** Сопоставим вершинам нижнего уровня вес 1, следующего уровня — 2, далее 5, 12, и наконец, 27. Заметим, что при каждом переселении не из вершины $A$ суммарный вес всех колоний увеличивается (ровно на 1). Изначальный суммарный вес не меньше 31, а конечный (если вершина $A$ пуста) не превосходит $31 \cdot 12$. Значит, не более чем после $31 \cdot 11 + 1$ миграций хотя бы одна колония окажется в корне. □

**1.3.** Докажите, что как бы колонии тупиков ни располагались изначально, миграциями можно расселить колонии по одной на остров.

**Решение.** Индукция по числу вершин.

База тривиальна.

Переход. Докажем, что в любой вершине можно получить не 0, обобщив рассуждение из пункта 2. Подвесим дерево за эту вершину. Рассмотрим такой полуинвариант: сумма по всем вершинам величин $x_i n^{-d_i}$, где $x_i$ — число в вершине, $d_i$ — её глубина в подвешенном дереве. Легко видеть, что каждая миграция не из корня дерева отдаёт единичку наверх и менее $n$ на уровень вниз, то есть сумма строго увеличивается. Но всех возможных сумм конечное число, так что рано или поздно будет возможна миграция только из корня, а это значит, что там не 0.

Теперь, собственно, переход. Рассмотрим лист $v$, при необходимости делаем там не 0 (мы только что доказали, что это возможно). Теперь отдаём из $v$ всё, кроме 1, его соседу $u$. Рассмотрим последовательность миграций, делающую единички в дереве без $v$ (она берётся из индукционного предположения). Применим её, только перед каждой миграцией из $u$ будем отдавать туда 1 из $v$. □

**1.4.** Пусть изначально на каждом острове обитает одна колония, и пусть один из островов имеет $d$ соседних. Чему может равняться максимально возможное количество колоний, способных поселиться на этом острове?

**Решение.** Ответ: $d + 1$.

*Пример.* Докажем, что в вершине степени $d$ может собраться $d+1$ колония. Подвесим дерево за эту вершину как за корень и будем доказывать, что в каждой вершине, из которой вниз идет $e$ рёбер, можно собрать $e + 1$ колонию, проводя только миграции в её поддереве. Докажем это «индукцией от нижних вершин к верхним». Для листьев утверждение очевидно (в них и так есть одна колония), а в для любой другой вершины достаточно собрать нужное количество колоний в её непосредственных потомках, после чего проделать по одной миграции для каждого из них.

*Оценка.* Покажем, что любое доступное распределение чисел на дереве можно получить, организуя миграции так, чтобы каждая колония уходила не дальше, чем на соседний остров. Из этого будет следовать, что ответ не больше $d + 1$.

Доказываем индукцией по числу миграций. База — ноль миграций, очевидна.

Переход. Пусть вот-вот произойдёт миграция с острова $v$. По ИП все находящиеся на нем колонии — с него и соседних островов. Раз можно мигрировать, по ИП на острове есть колонии хотя бы с $\deg v - 1$ соседних островов; отправим их обратно на свои острова. Если есть колония с оставшегося соседнего острова, тоже отправим её обратно, если есть своя колония, отправим её на любой из соседних островов. □

---

**Сюжет 2.** Две окружности, вписанные в угол с вершиной $R$, пересекаются в точках $A$ и $B$. Через $A$ проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке $C$, а большую — в точке $D$. Оказалось, что $AB = AC = AD$.

**2.1.** Докажите, что касательные к окружностям в точке $A$ перпендикулярны.

**Решение.** Заметим, что радиусы в точку $A$ являются биссектрисами смежных углов $DAB$ и $CAB$; следовательно радиусы перпендикулярны. Но тогда перпендикулярны и касательные. □

**2.2.** Пусть $C$ и $D$ совпали с точками касания окружностей и угла. Докажите, что угол $R$ прямой.

**Решение.** $\angle RDC = \angle DBA$ и $\angle RCD = \angle CBA$ так как равны половине дуг $AD$ и $AC$ соответственно (вписанный угол и угол между касательной и хордой равны половине дуги, в них заключенной). Треугольник $BCD$ прямоугольный (медиана — половина гипотенузы). Следовательно, $\angle RDC + \angle RCD = 90°$, поэтому $\angle R = 90°$. □

**2.3.** Пусть $C$ и $D$ совпали с точками касания окружностей и угла. Чему может быть равен угол $ADR$?

**Решение.** $15°$. Треугольник $RAB$ равносторонний: $RA = CD/2 = AB$ и $RA = RB$ по симметрии относительно биссектрисы угла $R$. Отсюда симметричные отрезки $RA, RB$ образуют со сторонами углы, равные $\frac{90°-60°}{2} = 15°$, и этому же равен $\angle ADR$ (т.к. $AD = AR$). □

**2.4.** Докажите, что если $\angle R$ прямой, то $C$ и $D$ совпадают с точками касания окружностей и угла.

**Решение.** Так как $AB = AC = AD$, то $AC$ и $AD$ должны быть симметричны $AB$ относительно радиусов соответствующих окружностей. Из этой симметричности ясно, что такие точки $C$ и $D$ единственны. Значит, если мы покажем, что точки касания подходят на их роль, мы победим.

Пусть радиус маленькой окружности равен 1, большой — $R$. Тогда из теоремы Пифагора для $\triangle O_1O_2A$ получим: $\left(\sqrt{2}(R-1)\right)^2 = 1^2 + R^2$. У этого уравнения ровно одно решение, где $R > 1$, а именно $R = 2 + \sqrt{3}$.

Пусть $C'$, $D'$ — точки касания первой и второй окружностей с разными сторонами угла. Введём систему координат параллельно сторонам угла, тогда

$$C' = (0, 1), \quad D' = (2 + \sqrt{3}, 0).$$

Пусть $A'$ — середина этого отрезка, тогда не очень трудно проверить, что она лежит на обеих окружностях:

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2 - \sqrt{3}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} + \frac{9}{4} + 3 + 3\sqrt{3} = 7 + 3\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$$

То есть можно считать $A' = A$. Осталось убедиться, что $AB = \frac{1}{2}C'D' = AC' = AD'$.

$$\frac{1}{2}C'D' = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})$$

(последнее равенство можно проверить, возведя в квадрат). По симметрии точка $B$ имеет координаты $(\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2})$, значит,

$$AB = \sqrt{2 \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3}).$$

Ура!

□

---

**Сюжет 3.** На $n$ карточках написали по $k$ чисел, сумма на каждой карточке равна $m$. Оказалось, что любой набор из $k$ неотрицательных чисел с суммой 1 можно получить, уменьшив некоторые числа на одной из карточек (наборы неупорядоченные). Пусть $a(n, k)$ — наименьшее $m$, при котором это возможно.

**3.1.** Найдите $a(1, 5)$.

**Решение.** Ответ: $2\frac{17}{60}$. Пусть $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$ — числа на единственной карточке, упорядоченный по убыванию. Тогда $x_1 \geqslant 1$ (чтобы покрыть карточку $(1; 0; 0; 0; 0)$); $x_2 \geqslant \frac{1}{2}$ (чтобы покрыть карточку $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; 0)$); аналогично $x_3 \geqslant \frac{1}{3}$, $x_4 \geqslant \frac{1}{4}$, $x_5 \geqslant \frac{1}{5}$. Заметим, что карточка $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5})$ подходит, поскольку на любой карточке наибольшее число не превосходит 1, следующее не превосходит $\frac{1}{2}$ и так далее. В итоге получается $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 2\frac{17}{60}$. □

**3.2.** Найдите $a(n, 2)$.

**Решение.** Ответ: $1 + \frac{1}{2n}$. Пара чисел, в сумме дающая 1, однозначно кодируется большим из них, т.е., произвольным числом $l$ из отрезка $\in [\frac{1}{2}, 1]$. Из пары чисел вида $(x, m - x)$, где $x \leqslant m - x$, можно (вычтя из обоих чисел в паре что-то с суммой $m-1$) получить, в лучшем случае, пары в которых $l \in [1-x, m-x]$, т.е. интервал длины $m-1$. Такими интервалами мы должны закрыть весь отрезок длины $\frac{1}{2}$, откуда оценка $n(m-1) \geqslant \frac{1}{2}$, т.е. $m \geqslant 1+\frac{1}{2n}$. Отсюда ясно и как построить пример: подойдёт набор

$$\left(\frac{1}{2n},\ 1\right),\ \left(\frac{2}{2n},\ \frac{n-1}{2n}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{n}{2n},\ \frac{n+1}{2n}\right).$$

□

**3.3.** Докажите, что найдется $n$ такое, что $a(n, 10^{100}) \leqslant 1+10^{-100}$.

**Решение.** Рассмотрим все возможные способы записать число $1+10^{-100}$ в виде суммы положительных рациональных дробей со знаменателем $10^{200}$ (не обязательно несократимых). Очевидно, что это количество конечно, его и обозначим за $n$ — записав все соответствующие наборы на карточки, убедимся, что такой набор карточек подходит. Действительно, рассмотрим любой набор с единичной суммой. Заменим в нём каждое число на ближайшую сверху дробь со знаменателем $10^{200}$. При таком округлении сумма увеличится не более, чем на $10^{100} \cdot \frac{1}{10^{200}} = 1/10^{100}$, значит получится один из наших наборов или аналогичный набор с меньшей суммой. Произвольно увеличив числители некоторых дробей так, чтобы сумма стала равной $1+10^{-100}$, мы превратим набор в числа на одной из карточек, которая, таким образом, мажорирует исходный набор с единичной суммой. □

**3.4.** Докажите, что найдется $k$ такое, что $a(10^{100}, k) > 10^{100}$.

**Решение.** Пусть имеется подходящий набор из $10^{100}$ карточек. Упорядочим на каждой карточке числа по убыванию. Для любого $l \leqslant k$ мы должны уметь мажорировать набор, состоящий из $l$ чисел равных $\frac{1}{l}$ и $k-l$ нулей, поэтому для каждого такого $l$ должна найтись карточка, в которой $l$-ое число не меньше $\frac{1}{l}$. Подчеркнём соответствующие числа — тогда сумма всех чисел на карточках не меньше суммы подчеркнутых, т. е. суммы $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}$. Как известно, найдётся $k$ для которого такая сумма больше $10^{200}$, значит сумма чисел на отдельной карточке должна быть больше $\frac{10^{200}}{10^{100}} = 10^{100}$. □