Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 22 декабря 2019 года
7 класс. Основная аудитория

1. Вася составил из шести различных цифр два трехзначных числа, в сумме дающих 533. Чему может быть равна сумма исходных цифр?

Решение. Воспользовавшись признаком делимости на 9, поймем, что сумма этих шести цифр должна быть сравнима по модулю 9 с 533, т. е. с 2, и быть не меньше $0+1+2+3+4+5=15$. Значит, она 20, 29 или 38. Примеры: $126+407$, $146+387$. Примера на 38 не существует: 4 младших разряда дают максимум $6+7+8+9=30$, значит, старшие — не менее 8, а должны не более 5. (Можно решить задачу и без признака делимости на 9, изучая переносы в следующий разряд при сложении.) □

2. Есть 90 красных, 97 синих и 77 зелёных гирек. Красные гирьки по 90 г, синие — по 97 г, зелёные — по 77 г. Известно, что среди гирек есть фальшивая, которая весит меньше заявленного веса. Как найти цвет этой гирьки за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Решение. Способ 1.

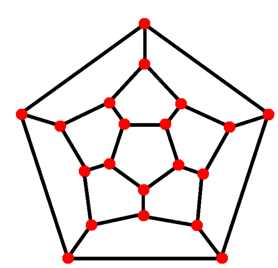
Первым взвешиванием положим на каждую чашу весов по 45 красных гирек. Неравенство будет означать, что красная — фальшивая. В случае равенства, вторым взвешиванием кладём 90 красных и 17 зеленых на одну чашу весов и 97 синих — на другую. Несложно заметить, что равенство ($97\cdot97=90\cdot90+17\cdot77$) или перевес правой части будет указывать на фальшивость зеленой гирьки, перевес левой части — на фальшивость синей.

Способ 2, не использующий данные о весах гирек (предложен некоторыми участниками олимпиады).

Положим на каждую чашку по 45 красных и 38 зелёных гирек. Если весы в равновесии, то фальшивая — оставшаяся зелёная гирька или одна из синих; зелёную проверим вторым взвешиванием, сравнив с любой другой зелёной (которая точно настоящая). Если же весы после первого взвешивания не в равновесии, то фальшивая — красная или одна из зелёных; проверим красные, оставив при втором взвешивании только их (по 45 на каждой чашке).

□

3. Страна Додекаэдрия имеет 20 городов и 30 авиалиний между ними. Карта авиалиний Додекаэдрии показана на рисунке. В одном из городов находится Фантомас, которого хочет изловить полиция. Каждый день Фантомас перелетает в другой город, используя ровно одну авиалинию. Каждый вечер полиции становится известно, в каком городе находится Фантомас. За ночь полиция совместно с авиакомпанией закрывают одну авиалинию между какими-то двумя городами, но взамен они должны открыть новое авиасообщение между какими-нибудь городами, между которыми авиалинии на данный момент нет (возможно, она была закрыта ранее). Фантомас попадается, если утром не может никуда перелететь. Сможет ли полиция поймать Фантомаса?



Решение.

Способ 1, в котором не требуется даже видеть Фантомаса, пока он не пойман.

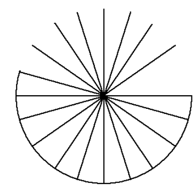
Полиция сможет поймать Фантомаса следующим образом: полицейские мысленно разбивают множество городов на две непересекающиеся группы А и Б по 10 городов.

Следующими действиями полицейские делает все авиалинии внутренними для группы А. Это возможно, т. к. в группе $(10 \cdot 9)/2 = 45$ возможных мест под авиалинии, а авиалиний всего 30.

Если Фантомас ещё не пойман, следующими действиями полиция перебрасывает линии так, чтобы они становились внутренними для группы Б. Т. к. на этом этапе линий между А и Б нет и не появляется, Фантомас не сможет перебраться в группу Б, и, тем самым, будет пойман, когда все 30 авиалиний станут внутренними для группы Б.

Способ 2. Допустим, Фантомас в вершине , которая входит в грань $ABCDE$. Тогда полиция пять ночей подряд закрывает авиалинии, которые ведут из кольца $ABCDE$ в остальную страну. Причём это можно делать так, чтобы Фантомас оставался в одной из вершин $ABCDE$. Потом убираем рёбра AB, BC, CD, DE. Всё, Фантомас пойман на 11-й день. Очевидно, что в остальной стране провести 10 авиалиний нетрудно.

Способ 3. Заметим, что полиция может превратить граф дорог в любой другой, если в нём столько же рёбер, сколько в исходном (30). Например, участник олимпиады Александр Ульянов использовал граф, нарисованный справа. На таком графе ловить Фантомаса гораздо легче (например, примерно как в Способе 2).



Полезное замечание. Схема дорог Додекаэдрии представляет собой граф правильного додекаэдра. Поэтому все вершины города в ней равноправны, так же как и все пятиугольные циклы. То есть нет необходимости отдельно рассматривать случаи, когда начальный город находится «на внешнем контуре», «на внутреннем контуре» и т. д.

□

4. На доске нарисован прямоугольник, он разрезан на 4 прямоугольничка поменьше с помощью двух прямолинейных разрезов. Если к доске подойдёт Андрюша, то он назовёт площадь каждого из меньших прямоугольников (в некотором случайном порядке), а если его брат-близнец Кирюша — то он назовёт периметры. Кто-то из братьев подошел к доске, и по названным им четырём числам оказалось невозможно понять (не глядя на доску), кто из них подошёл. Могут ли все эти числа быть различными?

Решение. Заметим, что произведения площадей левого нижнего и правого верхнего прямоугольников разбиения равно произведению площадей левого верхнего и правого нижнего прямоугольников. Также заметим, что сумма периметров левого нижнего и правого верхнего прямоугольников разбиения равна сумме периметров левого верхнего и правого нижнего прямоугольников. Пусть a и c — самые большое и самое маленькое числа из написанных на доске. Тогда очевидно, что $ac = bd$ и $a + c = b + d$. Отсюда следует, что $a = b + d - c$, а значит, $(b + d - c)c = bd$. Преобразуем это в $(b - c)(c - d) = 0$ и придём к тому, что какие-то два числа равны между собой. □

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 22 декабря 2019 года
7 класс. Выводная аудитория

5. Число 2401 равно четвёртой степени суммы своих цифр:

$$(2 + 4 + 0 + 1)^4 = 2401.$$

Докажите, что существует лишь конечное число натуральных чисел, обладающих таким же свойством.

Решение. Четвёртая степень суммы цифр n-значного числа не превосходит $9^4 \cdot n^4$, а само число не меньше, чем $10^{n-1} > 9^4 \cdot 10^{n-5}$.

Осталось доказать, что $10^{n-5} > n^4$ при больших n. Докажем это по индукции для $n \geqslant 10$.

Действительно, при $n = 10$ это верно. При замене n на $n+1$ левая часть увеличивается в 10 раз, а правая — в $\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 \leqslant \left(1 + \frac{1}{10}\right)^4 < 10$ раз. Значит, левая часть остаётся больше правой. □

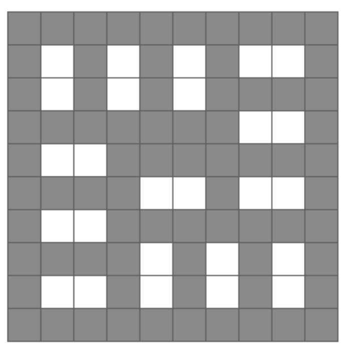
6. Есть полоска из 101 клетки, по ней может ходить фишка: на любое чётное число клеток вперёд, и на любое нечётное — назад. Вася и Петя хотят обойти своими фишками все клетки доски по разу: Вася — начиная с первой клетки, а Петя — начиная со пятидесятой. У кого больше способов это сделать?

Решение. Способов поровну. Представим себе, что это не полоска, а кольцо (соединим начало с концом), а двигаться можно только вперёд и только на чётное число клеток. Сделать ход на нечётное количество клеток назад равносильно тому, что сделать ход на чётное количество клеток вперёд на кольце. Получилась эквивалентная задача, в которой уже неважно, с какой клетки стартовать. □

7. Каждая клетка доски 10×10 покрашена в чёрный или белый цвет. Говорят, что клетка *не в своей тарелке*, если у неё хотя бы семь соседей не такого цвета, как она сама. (Соседями называются клетки, у которых есть общая сторона или общий угол.) Какое наибольшее количество белых клеток на доске одновременно могут быть не в своей тарелке?

Решение. Ответ: 26

Пример: 13 доминошек, не граничащих друг с другом и с краем доски.



Оценка. Назовем клетку не в своей тарелке НВСТ-клеткой. Для каждой НВСТ клетки нарисуем её *окрестность*: квадрат со стороной 2, у которого она в центре (его стороны идут не по сторонам сетки!). Белые НВСТ-клетки разбиваются на компоненты — одноклеточные, доминошки и косые доминошки. Они имеют окрестности размером 4, 6 и 7 клеток соответственно. Эти окрестности не пересекаются и лежат в центральном квадрате 9×9. Также можно заметить, что площадь окрестностей минимум втрое превосходит площадь самих клеток. Если НВСТ-клеток 27, то $27 \cdot 3 = 81$ (ровно втрое!), но отношение ровно 3 может быть, лишь если всё разбито на доминошки, а 27 нечётно. □