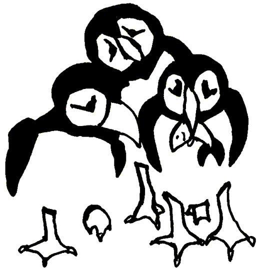
Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 22 декабря 2019 года
10 класс. Основная аудитория

Сюжет 1.

В архипелаге есть n скалистых островов, на них обитают n колоний ту́пиков (каждая колония целиком гнездится на одном острове). Некоторые пары островов соединены воздушными коридорами, причём от каждого острова до любого другого есть ровно один путь по этим коридорам. Острова, соединённые коридором, считаются соседними. Иногда происходят *миграции*: с некоторого острова на каждый соседний переселяется по колонии тупиков.



1.1. Докажите, что в любой момент может произойти миграция.

1.2. Докажите, что как бы колонии тупиков ни располагались изначально, миграциями можно расселить колонии по одной на остров.

Сюжет 2.

Две окружности, вписанные в угол с вершиной R, пересекаются в точках A и B. Через A проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке C, а большую — в точке D. Оказалось, что $AB = AC = AD$.

2.1. Пусть C и D совпали с точками касания окружностей и угла. Докажите, что угол R прямой.

2.2. Пусть C и D совпали с точками касания окружностей и угла. Чему может быть равен угол ADR?

Сюжет 3.

Миша взял простое число $p > 2$ и вот-вот выпишет на доску в ряд числа

$$a^1 + b^1,\ a^2 + b^2,\ \ldots,\ a^{p-1} + b^{p-1}.$$

Затем он хочет отыскать среди них пару чисел, дающих одинаковые остатки от деления на p.

3.1. Пусть $p = 7$. Приведите пример таких $a, b \not\vdots\, 7$, при которых искомой пары не будет.

3.2. Пусть $a = 4$, $b = 3$. Докажите, что будет искомая пара, содержащая одно из крайних чисел.

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 22 декабря 2019 года
10 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1.

В архипелаге есть n скалистых островов, на каждом из них обитает *одна* колония ту́пиков. Некоторые пары островов соединены воздушными коридорами, причём от каждого острова до любого другого есть ровно один путь по этим коридорам. Острова, соединённые коридором, считаются соседними. Иногда происходят *миграции*: с некоторого острова на каждый соседний переселяется по колонии тупиков.

1.3. Докажите, что число колоний на данном острове никогда не превысит количество соседних с ним островов более, чем на 1.

1.4. Произошло некоторое число миграций. После этого на каждый остров высадилось по орнитологу. Каждый орнитолог может перелететь на другой остров на личном вертолёте по тем же воздушным коридорам. Однако в целях безопасности в течение суток запрещено взлетать с соседних островов и пролетать дважды по одному и тому же коридору или над одним и тем же островом. Докажите, тем не менее, что некоторые орнитологи могут за сутки переместиться на другие острова, чтобы на каждом острове орнитологов и колоний тупиков оказалось поровну.

Сюжет 2.

Две окружности, вписанные в угол с вершиной R, пересекаются в точках A и B. Через A проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке C, а большую — в точке D. Оказалось, что $AB = AC = AD$.

2.3. Докажите, что если $\angle R$ прямой, то C и D совпадают с точками касания окружностей и угла.

2.4. Пусть $\angle R = 135^\circ$. Перпендикуляр из A на ближайшую сторону угла пересекает меньшую окружность в точке P, перпендикуляр из A на вторую сторону пересекает BP в точке Q. Наконец, пусть O_1 и O_2 — центры исходных окружностей, O — центр окружности, описанной около $\triangle ABQ$. Докажите, что BO — биссектриса угла O_1BO_2.

Сюжет 3.

Миша взял простое число $p > 2$ и вот-вот выпишет на доску в ряд числа

$$a^1 + b^1,\ a^2 + b^2,\ \ldots,\ a^{p-1} + b^{p-1}.$$

Затем он хочет отыскать среди них пару чисел, дающих одинаковые остатки от деления на p. Докажите, что у него получится, если

3.3. $a = 4$, $b = 7$;

3.4. $\frac{p-1}{2}$ — простое, $a = 2$ и $b = 3$.