

Комбинаторика

1. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 600 можно записать в виде суммы различных факториалов натуральных чисел?

ОТВЕТ: 31.

2. Тридевятое царство расположено на девяти островах, соединенных мостами. Его карта выглядит как два пятиугольника с общей стороной, где вершины пятиугольников — острова, а стороны — мосты. Сколькими способами можно разрушить некоторые мосты (хотя бы один) так, чтобы по оставшимся можно было добраться от любого острова до любого?

ОТВЕТ: 33.

3. Сколько существует восьмизначных чисел, произведение цифр которых делится на 15?

ОТВЕТ: 71 933 793.

4. Хулиганка Полина хочет покрасить каждое натуральное число в синий или желтый цвет следующим образом: число n должно быть покрашено в тот же цвет, что и число $n + 20$, и нет двух чисел, покрашенный в синий, что между ними стоит ровно 3 числа. Сколькими способами Полина может реализовать свой хитрый план?

ОТВЕТ: 14 641.

Геометрия

1. ABC — равнобедренный треугольник с прямым углом A . Точка D такова, что углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ по 30 градусов. Найдите сумму всех возможных вариантов значения угла $\angle BDC$, выраженных в градусах.

ОТВЕТ: 270.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CZ . $AZ = 9$, $BX = 5$, $BZ = 4$. Найдите площадь треугольника ABC с точностью до 3 знака после запятой.

ОТВЕТ: 62,4.

3. Даны две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 , соответственно. Радиус первой окружности равен 4, второй 3, расстояние между центрами равно 2. К ним проведены две общие касательные l_1 и l_2 , пересекающиеся в точке T . P — точка пересечения ω_1 и l_1 . Прямая b — делит угол O_1TP пополам. Обозначим дальнюю от T точку пересечения ω_1 и b за R , ближнюю к T точку пересечения ω_2 и b за S . Найдите, чему равняется $TR \cdot TS$.

ОТВЕТ: 36.

4. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка O такая, что $OA = \sqrt{2}$, $OB = \sqrt{3}$, $OC = \sqrt{5}$. Найдите длину стороны ABC с точностью до 3 знака после запятой.

ОТВЕТ: 304.

Теория чисел

1. Найдите наименьшее натуральное число такое, что $(n!)^3$ делится на $70!$.

ОТВЕТ: 67.

2. a, b — натуральные числа. Найдите наибольшее возможное значение $\text{НОД}(a^2 - 3, b^2 - a, b - 5)$.

ОТВЕТ: 622.

3. Простое число p называется *чиселком*, если существует такое натуральное число n , что $8p = \lfloor \frac{n^2}{8} \rfloor$. Найдите сумму всех чиселок.

ОТВЕТ: 25.

4. Дано 372-значное число $N = 185185 \dots 185$. Найдите какое-нибудь натуральное число x , имеющее двузначное количество цифр, такое, что N делится на $x^2 + x + 1$.

ОТВЕТ: НАПРИМЕР, $10^{31} - 1$.

Алгебра

1. Решите уравнение $3^{(5^2)} : (3^5)^2 = (3^5)^x$.

ОТВЕТ: 3.

2. Сколько решений имеет уравнение $\{x^3\} = \{\sqrt{x}\}$ на промежутке $[0, 100]$? Как обычно, $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a .

ОТВЕТ: 999 992.

3. Найдите наименьшее значение параметра a , при котором функция

$$y = \left| \dots \left| \left| -x^2 + 6x + a \right| - 2 \right| - 2 \right| \dots \left| - 2 \right. \quad (2018 \text{ пар } | \dots |)$$

имеет нечётное число корней.

ОТВЕТ: -4045.

4. Пусть $A = \{1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \dots, \frac{8^{1000}}{9^{1000}}\}$. Найдите сумму попарных произведений различных элементов этого множества. Ответ округлите до десятых и запишите в виде десятичной дроби.

ОТВЕТ: 38,1.